

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”****Ediția a XXVII-a****ETAPA NAȚIONALĂ – 17 mai 2025****Clasa a IX-a – Secțiunea H2 – Profil real, specializarea științe ale naturii****BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE****Subiectul 1:**

Se dă expresia $E(x) = \frac{1}{\sin^4 x + \cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x + \cos^4 x}$, $x \in [0, 2\pi]$.

a) Arătați că $\frac{3}{4} \leq t^2 - t + 1 \leq 1$, pentru orice $t \in [0, 1]$.

b) Determinați valoarea minimă respectiv valoarea maximă pentru expresia $E(x)$.

c) Determinați valorile lui $x \in [0, 2\pi]$ pentru care $E(x) \in \mathbb{Z}$.

Soluție:

a) $\frac{3}{4} \leq t^2 - t + 1, t \in [0, 1] \Leftrightarrow (2t - 1)^2 \geq 0$ adevărat1p

$t^2 - t + 1 \leq 1, t \in [0, 1] \Leftrightarrow t(t - 1) \leq 0, \forall t \in [0, 1]$ adevărat1p

b) Notăm $\sin^2 x = t, t \in [0, 1]$ atunci $E(x) = \frac{1}{\sin^4 x + \cos^2 x} + \frac{1}{\cos^4 x + \sin^2 x} = \frac{1}{t^2 + 1 - t} + \frac{1}{t + (1 - t)^2}$

$\Rightarrow E(x) = \frac{2}{t^2 - t + 1}$ 1p

$\max E(x) = \max \frac{2}{t^2 - t + 1} = \frac{8}{3}$ 1p

$\min E(x) = \min \frac{2}{t^2 - t + 1} = 2$ 1p

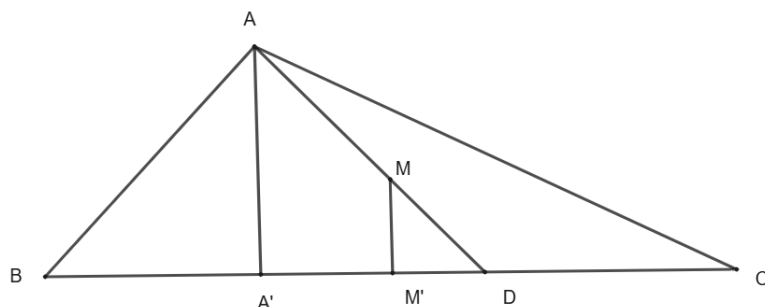
c) Cum $2 \leq E(x) \leq \frac{8}{3}$ și $E(x) \in \mathbb{Z} \Rightarrow E(x) = 2$ 1p

Deci $t^2 - t + 1 = 1 \Rightarrow t = 0, t = 1 \Rightarrow \sin x = 0$ sau $\cos x = 0 \Rightarrow x \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}$ 1p

Subiectul 2:

Fie triunghiul ABC , M un punct interior acestuia și D, E, F punctele de intersecție a dreptelor AM, BM, CM cu laturile BC, AC , respectiv AB .

- Arătați că $\frac{A_{\triangle BMC}}{A_{\triangle ABC}} = \frac{MD}{AD}$;
- Arătați că $\frac{MD}{AD} + \frac{ME}{BE} + \frac{MF}{CF} = 1$;
- Demonstrați că $\frac{MA}{MD} + \frac{MB}{ME} + \frac{MC}{MF} \geq 6$ și determinați poziția punctului M pentru care se realizează egalitatea.

Soluție:


- a) Fie $MM' \perp BC, AA' \perp BC$

$$\text{Atunci } \frac{A_{\triangle BMC}}{A_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{BC \cdot MM'}{2}}{\frac{BC \cdot AA'}{2}} = \frac{MM'}{AA'} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Dar } \frac{MM'}{AA'} = \frac{MD}{AD}, \quad (\triangle DMM' \sim \triangle DAA'), \text{ deci } \frac{A_{\triangle BMC}}{A_{\triangle ABC}} = \frac{MD}{AD} \dots\dots\dots 1p$$

- b) Conform a)

$$\begin{aligned} \frac{MD}{AD} + \frac{ME}{BE} + \frac{MF}{CF} &= \frac{A_{\triangle BMC} + A_{\triangle AMB} + A_{\triangle AMC}}{A_{\triangle ABC}} \\ &= \dots\dots\dots 1p \\ &= \frac{A_{\triangle ABC}}{A_{\triangle ABC}} = 1 \dots\dots\dots 1p \end{aligned}$$

$$\text{c) } \frac{MA}{MD} = \frac{AD - MD}{MD} = \frac{AD}{MD} - 1 \text{ și analoagele } \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Condiția devine } \frac{AD}{MD} + \frac{BE}{ME} + \frac{CF}{MF} \geq 9.$$

Fie $x = \frac{MD}{AD}$, $y = \frac{ME}{BE}$, $z = \frac{MF}{CF}$, deci $x + y + z = 1$. Avem de arătat că $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 9$.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{x+y+z}{x} + \frac{x+y+z}{y} + \frac{x+y+z}{z} = 3 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) \geq 9, \text{ deoarece } \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \text{ și}$$

analoagele; avem egalitate dacă $x = y = z = \frac{1}{3}$ 1p

Conform a) $A_{\triangle BMC} = A_{\triangle AMC} = A_{\triangle AMB} = \frac{1}{3} A_{\triangle ABC}$, deci M este centrul de greutate al triunghiului ABC 1p

Subiectul 3:

Fie $n \geq 3$ un număr natural impar și numerele întregi $a_1, a_2, \dots, a_n$ astfel încât sunt verificate simultan condițiile : $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ și $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = n$.

a) Pentru $n = 3$, determinați numerele a_1, a_2, a_3 .

b) Arătați că pentru orice număr natural impar , $n \geq 3$ există numerele întregi $a_1, a_2, \dots, a_n$, care verifică condițiile date.

c) Arătați că cel puțin două dintre numerele $a_1, a_2, \dots, a_n$ sunt egale.

Soluție:

a) $n = 3$, $a_1 + a_2 + a_3 = 1$, $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 3 \Rightarrow a_1, a_2, a_3 \in \{-1, 0, 1\}$ 1p

$(a_1, a_2, a_3) \in \{(1, -1, 1); (-1, 1, 1); (1, 1, -1)\}$ 1p

b) Pentru $n = 2k + 1$, alegem $a_1 = a_2 = \dots = a_{k+1} = 1$ și $a_{k+2} = \dots = a_{2k+1} = -1$.

.....2p

c) Pentru $n = 3$ rezultă din a).....1p

Fie $n = 2k + 1, k \geq 2$.

Presupunem că numerele $a_1, a_2, \dots, a_n$ sunt distincte două câte două. Atunci cea mai mică valoare a numărului $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$ este $0^2 + 2(1^2 + 2^2 + \dots + k^2)$ și se atinge când numerele sunt

$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots, k-1, -(k-1), k, -k$1p

Rezultă: $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq 0^2 + 2(1^2 + 2^2 + \dots + k^2) \geq 2k^2 > 2k + 1$.

$(2k^2 > 2k + 1 \Leftrightarrow 2k(k-1) > 1, \text{ adevărată pentru } k \geq 2)$. Astfel $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 > n$, contradicție..... 1p

Notă: Obținem pentru anumite valori ale lui n și valori pentru a_i diferite de -1 și 1. Exemplu:

$3 + (-1) + (-1) + 0 + \dots + 0 = 1 \Rightarrow n = 3^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + 0 + \dots + 0 = 11$, cu $k = 8$, numărul termenilor de 0.

Subiectul 4:

Andrei are o grădină în formă de pătrat $ABCD$ cu latura de lungime $(2n+1)$ dam, $n \in \mathbb{N}$. El plasează garduri pentru a-și împărți grădina în parcele dreptunghiulare, pentru fiecare număr par k cuprins între 1 și $(2n+1)$, dorind să obțină exact câte două parcele orizontale cu dimensiunile k dam și 1dam (laturile de lungime k dam paralele cu AB), exact câte două parcele verticale cu dimensiunile 1dam și k dam (laturile de lungime k dam paralele cu BC), precum și o singură parcelă pătrată cu latura de 1dam.

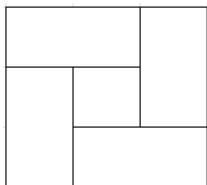
Notăm cu a_m numărul de moduri în care poate realiza împărțirea pentru o grădină de latură $(2m+1)$ dam.

- Arătați că $a_1 = 2$.
- Realizați o împărțire a grădinii pentru $n = 2$.
- Arătați că $a_m = 2a_{m-1}, m \in \mathbb{N}^*$.
- Determinați n minim dacă Andrei are mai mult de 2025 de posibilități de a împărți grădina.

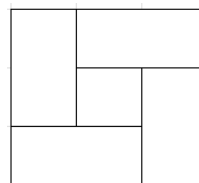
Soluție:

- a) $n = 1, AB = 3$ dam. Pătratul $ABCD$ trebuie împărțit în două parcele $(2,1)$, două parcele $(1,2)$ și o parcelă $(1,1)$.

Avem posibilitățile :

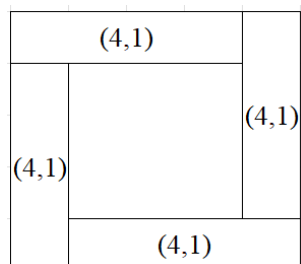


și



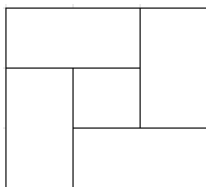
Deci: $a_1 = 2$ 2p

- b) $n = 2, AB = 5$ dam. De exemplu:

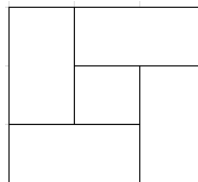


Pătratul din interior este de latură 3dam și îl împărțim ca la subpunctul a).....2p

c) Notăm cu $a_m, m \in \mathbb{N}^*$, numărul de moduri în care putem împărți pătratul $(2m+1) \times (2m+1)$ în parcele care verifică cerința problemei. Plasăm mai întâi parcelele $(2m, 1)$ și $(1, 2m)$. Avem, astfel, doar două posibilități:



și



Pătratul din interior are latura $(2m-1)$ poate fi împărțit în a_{m-1} moduri (dacă $m=1$, rămâne un pătrat cu latura egală cu 1, $a_0=1$). Astfel $a_m = 2a_{m-1}, m \in \mathbb{N}^*, (a_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ progresie geometrică1p

d) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ progresie geometrică de rație $q=2$ și $a_1=2 \Rightarrow a_n=2^n$ 1p

$2^n > 2025 \Rightarrow n \geq 11, n_{\min} = 11$ 1p

Notă: Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.